マイナス微分を定義し、主要部のみのローラン展開を実数で表現する

鈴木　啓一

概要　:「ローラン展開が正則部のみの場合、テイラー展開と一致するが、主要部のみの場合はなにと一致する？」という疑問から、微分の新たな反対「マイナス微分」を定義し、主要部のみのローラン展開を実数で証明する。

検索語：テイラー展開、ローラン展開、マイナス微分

Abstract: Consider the following question: “When the Laurent expansion has only the regular part, it is identical to the Taylor expansion. However, when the Laurent expansion has only the principal part, what is it identical to?” In light of this question, we will newly define the opposite of differentiation, “negative differentiation”, and we will prove the Laurent expansion with only the principal part, using real numbers.

Keywords: Taylor expansion, Laurent expansion, negative differentiation

1　はじめに

$f(z)$ が $|z-a|<r$ でローラン展開可能で、展開した結果が正則部のみならば、

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\,(n\geq 0)$$

とおける。変数を実数のみにし、テーラー展開

$$f(x)=f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

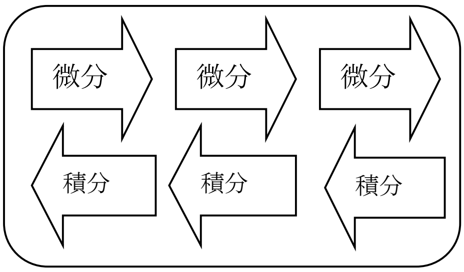
と比較すると、下記のように係数が一致する。

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(k\geq 1)$$

かつ、各係数には下記のような関係がある。

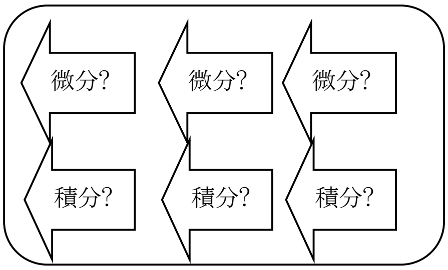
$$f(z)=a_0\qquad a_1\qquad a_2\qquad a_3$$

$$f(a)\qquad f^{(1)}(a)\qquad \frac{f^{(2)}(a)}{2}\qquad \frac{f^{(3)}(a)}{6}$$



$f(z)$ が $|z-a|>R$ でローラン展開可能で、展開結果が主要部のみであれば、係数にどのような関係があるのだろうか。下記のように、微分とか積分の関係があるのだろうか？

$$f(z)=a_{-3}\qquad a_{-2}\qquad a_{-1}\qquad a_0$$

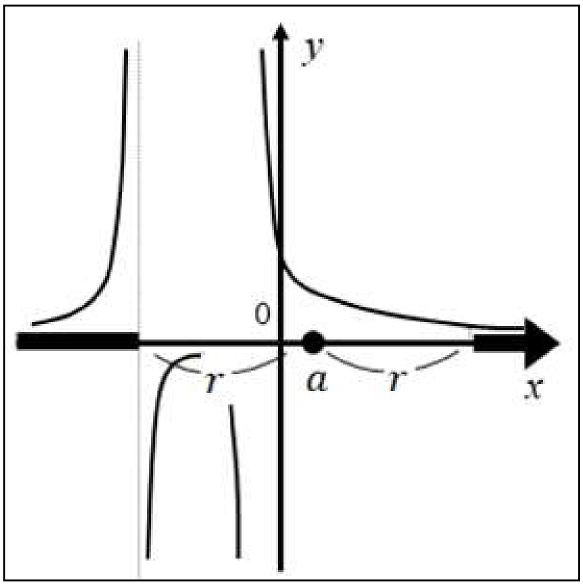


もしも実数のみで表現できるのであれば、

$$f(x)=y_1+\frac{f^{(-1)}(a)}{x-a}+\frac{f^{(-2)}(a)}{2!(x-a)^2}+\cdots+\frac{f^{(1-n)}(a)}{(n-a)!(x-a)^{n-1}}+\frac{f^{(-n)}(\Phi)}{(x-a)^n}$$

のような式になると思う。$x-a$ は分母にきて、r を実数として、領域 $r<|x-a|$ で定義される。

図１



係数の階乗$k!$を分母に置いたが、実際には分母にくるか分子にくるかはわからない。$f(x)$は、領域$r<|x-a|$において、微分可能という条件が必要と思う。kを自然数として、$f^{(-k)}(a)$はaに依存する係数になると思う。テイラー展開では$f^{(k)}(a)$とプラス表記するため、マイナス表記が妥当と思う。ただ、aの近傍において$f(x)$が微分可能とか連続さえも保証されていないので、いかにして$f^{(-k)}(a)$を表現するかが問題である。

２　前準備

$f(z)$が$|z-a|<r$でローラン展開可能で正則部のみとする。つまりテイラー展開可能になる。

$$Z-A=\frac{1}{z-a}$$

$$R-A=\frac{1}{r-a}$$

$$f(z)=f\left(a+\frac{1}{Z-A}\right)=F(Z)$$

とおく。$F(Z)$は$|Z-A|>R$でローラン展開可能でかつ主要部のみとなる。

テイラー展開は$f(x)$を微分することにより出来上がるから、$X-A=\dfrac{1}{x-a}$として、

$$f(x)=f\left(a+\frac{1}{X-A}\right)=F(X)$$

をもとに、$F(X)$のXによる微分を再定義すれば、$F(X)$の展開の係数の関係が導けるだろう。

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots$$

とすると、

$$F(X)=a_0+\frac{a_1}{X-A}+\frac{a_2}{(X-A)^2}+\cdots$$

になるので、$k>0$に対し$a_k=a_{-k}$となる。

となる。そして、$F(X)$の微分、平均値の定理を新たに作ることができたら、うまくゆくかもしれない。なお、ローラン展開の主要部の係数表示が、$a_0,a_{-1},a_{-2},\cdots$とマイナス表示なので、$F^{(-k)}(A)$と表現し、「マイナス微分係数」と呼ぶことが妥当と思う。

$F(X)$の性質を簡単に考察する。

$$a_0=f(a)=\lim_{X\to\infty}F(X)$$

$$f^{(1)}(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

$$=\lim_{\substack{X_1\to X\\ x_1\to x}}\left(\frac{F(X_1)-F(X)}{X_1-X}\times\frac{X_1-X}{x_1-x}\right)$$

$$=-(X-A)^2\frac{dF(X)}{dX}$$

$$a_{-1}=f^{(1)}(a)=-\lim_{X\to\infty}(X-A)^2\frac{dF(X)}{dX}$$

ここで、$-(X-A)^2\dfrac{dF(X)}{dX}=F_A^{(-1)}(X)$とおく。

$$\lim_{x\to a}f^{(1)}(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=-\lim_{X\to\infty}(X-A)^2\frac{dF(X)}{dX}$$

$$=\lim_{X\to\infty}F_A^{(-1)}(X)$$

が成り立つので、$F_A^{(-1)}(X)$は微分の定義式（近似式）と一致する。$F_A^{(-1)}(X)$のことを「マイナス微分の近似関数」と呼ぶことが妥当と思う。

$F_A^{(-1)}(X)$ は、領域 $|X-A|>R$ で定義された X の関数になる。

$a_{-1}=\lim_{X\to\infty} F_A^{(-1)}(X)$

と書き直すことができる。

$\lim_{X\to\infty} F_A^{(-1)}(X)=F^{(-1)}(A)$ とおく。

A を変数と考えると、$F^{(-1)}(A)$ は A の関数になる。

$$f^{(2)}(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f^{(1)}(x_1)-f^{(1)}(x)}{x_1-x}$$

$$=\lim_{\substack{X_1\to X\\ x_1\to x}}\left(\frac{F_A^{(-1)}(X_1)-F_A^{(-1)}(X)}{X_1-X}\times\frac{X_1-X}{x_1-x}\right)$$

$$=-(X-A)^2\frac{dF_A^{(-1)}(X)}{dX}$$

$$a_{-2}=\frac{1}{2}f^{(2)}(a)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{X\to\infty}(X-A)^2\frac{dF_A^{(-1)}(X)}{dX}$$

ここで、

$$F_A^{(-2)}(X)=-(X-A)^2\frac{dF_A^{(-1)}(X)}{dX}$$

$$\lim_{X\to\infty}F_A^{(-2)}(X)=F^{(-2)}(A)$$

とおくと、$a_{-2}=\frac{1}{2}F^{(-2)}(A)$

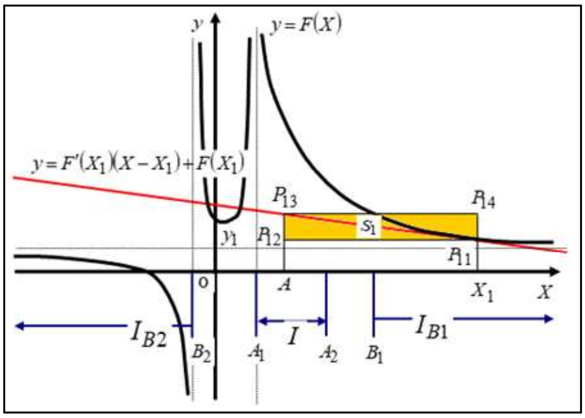
この性質を使って考察する。

なお、X 座標軸内の要素は大文字、x 座標軸内の要素は小文字で表現する。区間 $|x-a|<r$ で定義された関数を、$f(x), g(x)$ などのように小文字で表現する。区間 $|X-A|>R$ で定義された関数を、$F(X), G(X)$ などのように大文字で表現する。

３　マイナス微分とその応用

３，１　マイナス微分の定義

図２



$y=F(X)$ を Xy 平面上で定義された実数値関数とする。$\lim_{X\to\pm\infty}F(X)=y_1,\ (|y_1|<\infty)$ とする。

$X=A$ を基準に $y=F(X)$ を考察する。R を正の実数として、$B_1=A+R, B_2=A-R$ とおく。$y=F(X)$ が区間 $I_{B1}=\{X:B_1<X<\infty\}$ 及び $I_{B2}=\{X:-\infty<X<B_2\}$ で微分可能とする。

$X_1\in I_{B1}$ に対して、点 $(X_1,F(X_1))$ を P_{11}、点 $(A,F(X_1))$ を P_{12}、点 $(X_1,F(X_1))$ での接線と直線 $X=A$ との交点を P_{13} とする。X 座標を X_1、y 座標を点 P_{13} の y 座標をとする点を P_{14} とする。$\frac{P_{12}P_{13}}{P_{12}P_{11}}=-F'(X_1)$ となるので、長方形 $P_{11}P_{12}P_{13}P_{14}$ の面積 S_1 は、

$$S_1=-\lim_{X_{11}\to X_1}(X_1-A)^2\frac{F(X_1)-F(X_{11})}{X_1-X_{11}}$$

$$=-(X_1-A)^2F'(X_1)$$

となる。

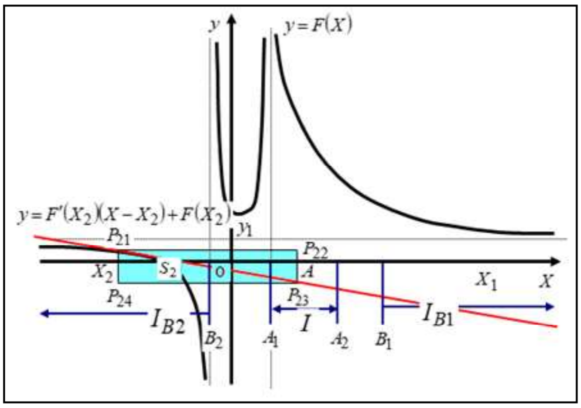
$S_1=F_{R,A}^{(-1)}(X_1)$ と定義し、$X=A$ を基準とする X_1 における F の「右へのマイナス微分の近似関数」と呼ぶことにする。

$\lim_{X_1\to\infty}S_1$ を考えると A の関数になるので、

$$F_R^{(-1)}(A)=\lim_{X_1\to\infty}F_{R,A}^{(-1)}(X_1)$$

と定義し、$X=A$ における $F_R^{(-1)}(A)$ を「右へのマイナス微分係数」と呼ぶことにする。

図３



$X_2 \in I_{B2}$ に対して、点 $(X_2, F(X_2))$ を P_{21}、点 $(A, F(X_2))$ を P_{22}、点 $(X_2, F(X_2))$ での接線と直線 $X = A$ との交点を P_{23} とする。X 座標を X_2、y 座標を点 P_{23} の y 座標をとする点を P_{24} とする。$\dfrac{P_{22}P_{23}}{P_{22}P_{21}} = -F'(X_2)$ となるので、

長方形 $P_{21}P_{22}P_{23}P_{24}$ の面積 S_2 は、

$$S_2 = -\lim_{X_{21}\to X_2} (X_2 - A)^2 \frac{F(X_2) - F(X_{21})}{X_2 - X_{21}}$$
$$= -(X_2 - A)^2 F'(X_2)$$

となる。

$S_2 = F_{L,A}^{(-1)}(X_2)$ と定義し、$X = A$ を基準とする X_2 における F の「左へのマイナス微分の近似関数」と呼ぶことにする。

$\lim_{X_2\to\infty} S_2$ を考えると A の関数になるので、

$$F_L^{(-1)}(A) = \lim_{X_2\to\infty} F_{L,A}^{(-1)}(X_2)$$

と定義し、$X = A$ における $F_L^{(-1)}(A)$ を「左へのマイナス微分係数」と呼ぶことにする。

$\lim_{X_1\to\infty} F(X_1) = \lim_{X_2\to-\infty} F(X_2)$ の場合、

$y = F(X)$ は「無限遠点で連続」と呼ぶことにする。

$$F_A^{(-1)}(X) = \begin{cases} F_{R,A}^{(-1)}(X), (X \in I_{B1}) \\ F_{L,A}^{(-1)}(X), (X \in I_{B2}) \end{cases}$$

と定義し、$F_A^{(-1)}(X)$ を「マイナス微分の近似関数」と呼ぶことにする。

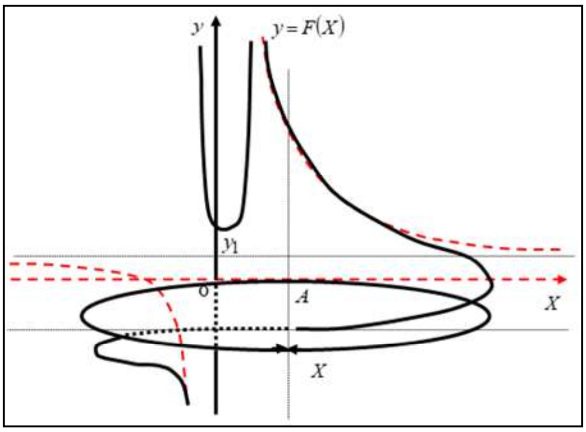
$F_R^{(-1)}(A) = F_L^{(-1)}(A)$ の場合、$X = A$ における $y = F(X)$ の「マイナス微分係数」を $F^{(-1)}(A)$ で定義する。A を変数と考えると、$F^{(-1)}(A)$ は A の関数になる。A の近傍で微分可能ならば、「マイナス微分可能」と呼ぶことにする。なお、ここで、

$$F^{(-1)}(A) = \lim_{X\to\infty} F_A^{(-1)}(X)$$

が成り立つ。関数 $F^{(-1)}(A)$ が、A の近傍で A で微分可能ならば、$F^{(-1)}$ を「マイナス導関数」と呼ぶことにする。$F^{(-1)}$ を $d^{(-1)}F$ と表す場合もある。

これは、A を中心に座標を折り返し、無限遠点で結んだ点で F の微分を考えたものである。

図４



３，２　マイナス微分の演算について

（１）　マイナス微分の近似関数

区間 I_{B1}, I_{B2} 上で、関数 F, G が微分可能であれば、マイナス微分の近似関数に次の性質がある。

（１，１）α, β が実数として、

$$(\alpha F + \beta G)_A^{(-1)}(X) = \alpha F_A^{(-1)}(X) + \beta G_A^{(-1)}(X)$$

なぜならば、

$$\begin{aligned}(\alpha F + \beta G)_A^{(-1)}(X) &= -(X-A)^2 (\alpha F(X) + \beta G(X))' \\ &= -(X-A)^2 (\alpha F'(X) + \beta G'(X)) \\ &= -\alpha (X-A)^2 F'(X) \\ &\qquad -\beta (X-A)^2 G'(X) \\ &= \alpha F_A^{(-1)}(X) + \beta G_A^{(-1)}(X)\end{aligned}$$

（１，２）$\left(FG\right)_A^{(-1)}\left(X\right)$

$$=\left(F'G\right)_A^{(-1)}\left(X\right)+\left(FG'\right)_A^{(-1)}\left(X\right)$$

なぜならば

$$\left(FG\right)_A^{(-1)}\left(X\right)=-\left(X-A\right)^2\left(F\left(X\right)G\left(X\right)\right)'$$
$$=-(X-A)^2(F'(X)G(X)+F(X)G'(X))$$
$$=-(X-A)^2F'(X)G(X)$$
$$-(X-A)^2F(X)G'(X)$$
$$=\left(F'G\right)_A^{(-1)}\left(X\right)+\left(FG'\right)_A^{(-1)}\left(X\right)$$

（２）マイナス微分係数

関数F,Gが微分可能であれば、次の性質がある。

（２，１）α,βが実数として、

$$(\alpha F+\beta G)^{(-1)}(A)$$
$$=\alpha F^{(-1)}(A)+\beta G^{(-1)}(A)$$

なぜならば、

$$(\alpha F+\beta G)^{(-1)}(A)$$
$$=-\lim_{X\to\infty}\left(\alpha F+\beta G\right)_A^{(-1)}\left(X\right)$$
$$=\lim_{X\to\infty}\left(\alpha F_A^{(-1)}\left(X\right)+\beta G_A^{(-1)}\left(X\right)\right)$$
$$=\alpha\lim_{X\to\infty}F_A^{(-1)}\left(X\right)+\beta\lim_{X\to\infty}G_A^{(-1)}\left(X\right)$$
$$=\alpha F^{(-1)}(A)+\beta G^{(-1)}(A)$$

（２，２）$(FG)^{(-1)}(A)$

$$=(F'G)^{(-1)}(A)+(FG')^{(-1)}(A)$$

なぜならば

$$\left(FG\right)^{(-1)}\left(A\right)=-\lim_{X\to\infty}\left(FG\right)_A^{(-1)}\left(X\right)$$
$$=\lim_{X\to\infty}\left(\left(F'G\right)_A^{(-1)}\left(X\right)\right.$$
$$\left.+\left(FG'\right)_A^{(-1)}\left(X\right)\right)$$
$$=\lim_{X\to\infty}\left(F'G\right)_A^{(-1)}\left(X\right)$$
$$+\lim_{X\to\infty}\left(FG'\right)_A^{(-1)}\left(X\right)$$
$$=(F'G)^{(-1)}(A)+(FG')^{(-1)}(A)$$

（３）マイナス導関数

$F^{(-1)}\left(A\right)$がAの近傍でAで微分可能ならば、（２，１）、（２，２）を満たす。

（４）第n次マイナス導関数

$F_A^{(-1)}\left(X\right)$が区間I_{B1},I_{B2}上でX微分可能で、$-\left(X-A\right)^2\dfrac{d}{dX}F_A^{(-1)}\left(X\right)$が存在すれば、

$$F_A^{(-2)}\left(X\right)=-\left(X-A\right)^2\frac{d}{dX}F_A^{(-1)}\left(X\right)$$

と定義し、$F_A^{(-2)}\left(X\right)$を「第２次マイナス微分の近似関数」、

$$F^{(-2)}\left(A\right)=\lim_{X\to\infty}F_A^{(-2)}\left(X\right)$$

が存在すれば、$F^{(-2)}(A)$を「第２次マイナス微分係数」、$F^{(-2)}(A)$がAの近傍で微分可能ならば、$F^{(-2)}$を「第２次マイナス導関数」と呼ぶことにする。$F^{(-2)}$を$d^{(-2)}F$と表す場合もある。同様に、

$$F_A^{(-n)}\left(X\right)=-\left(X-A\right)^2\frac{d}{dX}F_A^{(1-n)}\left(X\right)$$

を「第n次マイナス微分の近似関数」

$$F^{(-n)}\left(A\right)=\lim_{X\to\infty}F_A^{(1-n)}\left(X\right)$$

を「第n次マイナス微分係数」、$F^{(-n)}\left(A\right)$がAの近傍でAで微分可能ならば、$F^{(-n)}$を「第n次マイナス導関数」と呼ぶことにする。

（５）マイナス微分の近似関数の例

$F(X)=\dfrac{1}{(X-A)^n}$の場合

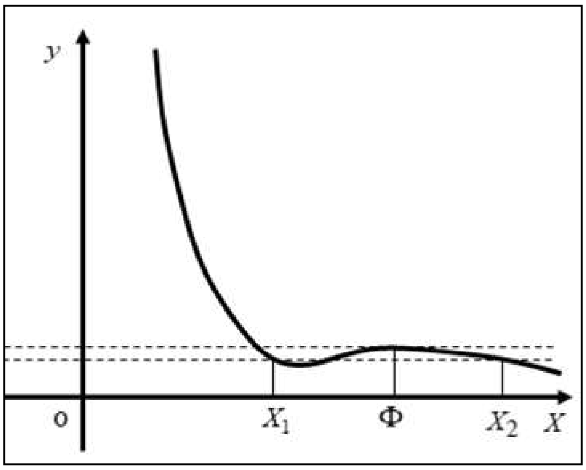
$$F'(X)=-\frac{n}{(X-A)^{n+1}}$$
$$F_A^{(-1)}\left(X\right)=\frac{n}{\left(X-A\right)^{n-1}}$$
$$F_A^{(-2)}\left(X\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{\left(X-A\right)^{n-2}}$$
$$F_A^{(1-n)}\left(X\right)=\frac{n!}{X-A}$$
$$F_A^{(-n)}\left(X\right)=n!$$
$$F_A^{(-n-1)}\left(X\right)=0$$

３，３　マイナス微分のロルの定理

（引用[１]）

$F(X)$ が区間 I_{B1} で連続かつ微分可能、$X_1, X_2 \in I_{B1}, X_2 < X_1$、$F(X_1)=F(X_2)$ ならば $F'(\Phi)=0$ を満たす $\Phi(X_1<\Phi<X_2)$ が存在する。特に、$F(X_1)=\lim_{X_2\to\infty} F(X_2)$ ならば、$F'(\Phi)=0$ を満たす $\Phi(X_1<\Phi<\infty)$ が存在する。同様に I_{B2} 上でも同じような性質がある。

図５



（証明）

$f(x)$ が区間 $|x-a|<r$ で連続で微分可能ならば、ロルの定理が成り立ち、区間の中で、$a<x_2<x_1$、$f(x_1)=f(x_2)$ ならば、$f'(\phi)=0$ を満たす $\phi(x_2<\phi<x_1)$ が存在する。

$X-A=\dfrac{1}{x-a}$、$R-A=\dfrac{1}{r-a}$

$F(X)=F\left(\dfrac{1}{x-a}+A\right)=f(x)$

と変換する。

$f'(x)=-(X-A)^2 F'(X)$

が成り立つ。

$X_1-A=\dfrac{1}{x_1-a}$、$X_2-A=\dfrac{1}{x_2-a}$、

とおく。$X_1, X_2 \in I_{B1}$

$\Phi-A=\dfrac{1}{\phi-a}$ とおく。

$f'(\phi)=-(\Phi-A)^2 F'(\Phi)$

なので、$F(X_1)=F(X_2)$ ならば $F'(\Phi)=0$ を満たす $\Phi(X_1<\Phi<X_2)$ が存在する。

特に、$x_2=a$ の場合、$f(a)=\lim_{X_2\to\infty} F(X_2)$ となるので、$\Phi(X_1<\Phi<\infty)$ となる条件を満たす。

３，４　マイナス微分のコーシーの平均値の定理

（引用[１]）

I_{B1} で関数 F,G が微分可能ならば

$X_1, X_2 \in I_{B1}$ に対して、

$$\left(F(X_2)-F(X_1)\right)G_A^{(-1)}(\Phi)$$
$$=\left(G(X_2)-G(X_1)\right)F_A^{(-1)}(\Phi)$$

を満たす

$\Phi(X_1<\Phi<X_2)$ が存在する。

また、$G(X_1)\neq G(X_2)$ かつ F', G' が同時に 0 にはならないとすれば、

$$\frac{F(X_2)-F(X_1)}{G(X_2)-G(X_1)}=\frac{F_A^{(-1)}(\Phi)}{G_A^{(-1)}(\Phi)}$$

（証明）

$f(x), g(x)$ が区間 $|x-a|<r$ で連続で微分可能ならば、コーシーの平均値の定理が成り立つ。つまり、

$$\left(f(x_1)-f(x_2)\right)g'(\phi)=\left(g(x_1)-g(x_2)\right)f'(\phi)$$

を満たす $\phi(x_2<\phi<x_1)$ が存在する

$X-A=\dfrac{1}{x-a}$ で変数変換する。

$X_1-A=\dfrac{1}{x_1-a}$、$X_2-A=\dfrac{1}{x_2-a}$

$R-A=\dfrac{1}{r-a}$

$F(X)=F\left(\dfrac{1}{x-a}+A\right)=f(x)$

$G(X)=G\left(\dfrac{1}{x-a}+A\right)=g(x)$

とする。f,g を微分すると、

$f'(x)=-(X-A)^2 F'(X)$

$g'(x)=-(X-A)^2 G'(X)$

となる。これらを代入すると、

$$\left(F(X_2)-F(X_1)\right)(\Phi-A)^2 G'(\Phi)$$
$$=\left(G(X_2)-G(X_1)\right)(\Phi-A)^2 F'(\Phi)$$
$$\left(F(X_2)-F(X_1)\right)G_A^{(-1)}(\Phi)$$
$$=\left(G(X_2)-G(X_1)\right)F_A^{(-1)}(\Phi)$$

したがって、上式を満たす$\Phi\left(X_1<\Phi<X_2\right)$が存在することになる。

また、$g(x_1)\neq g(x_2)$かつf', g'が同時に0にはならないとすれば、

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}=\frac{f'(\phi)}{g'(\phi)}$$

が成り立つ。これを変数変換する。

$G(X_1)\neq G(X_2)$かつF', G'が同時に0にはならないとすれば、

$$\frac{F(X_2)-F(X_1)}{G(X_2)-G(X_1)}=\frac{F'(\Phi)}{G'(\Phi)}$$
$$=\frac{-(\Phi-A)^2 F'(\Phi)}{-(\Phi-A)^2 G'(\Phi)}$$
$$=\frac{F_A^{(-1)}(\Phi)}{G_A^{(-1)}(\Phi)}$$

が成り立つ。

３，５　ローラン展開の主要部を実数で定義する。

（引用[１]）

$F(X)$が区間I_{B1}上で第n次マイナス微分の近似関数が存在し、$X=A$で第$n-1$次までのマイナス微分係数が存在するとする。

$A\in I, B\in I_{B1}, \lim_{X\to\infty} F(X)=y_1$とすると

$$F(B)=y_1+\frac{F^{(-1)}(A)}{B-A}+\frac{F^{(-2)}(A)}{2!(B-A)^2}+\cdots$$
$$+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(B-A)^{n-1}}+\frac{F_A^{(-n)}(\Phi)}{n!(B-A)^n}$$

を満たす$\Phi\in I_{B1}$が存在する。

（証明）

$$G(X)=F(X)-\left(y_1+\frac{F^{(-1)}(A)}{X-A}+\frac{F^{(-2)}(A)}{2!(X-A)^2}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(X-A)^{n-1}}\right)、(X\in I_{B1})$$

とおく。

$0<k<n$として、$F^{(-k)}(A)$が有限だから、

$\lim_{X\to\infty}\frac{F^{(-k)}(A)}{k!(X-A)^k}=0$となる。したがって、

$$\lim_{X\to\infty}G(X)=\lim_{X\to\infty}F(X)$$
$$-\lim_{X\to\infty}\left(y_1+\frac{F^{(-1)}(A)}{X-A}+\frac{F^{(-2)}(A)}{2!(X-A)^2}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-1)!(X-A)^{n-1}}\right)$$
$$=y_1-y_1$$
$$=0$$
$$H(X)=\frac{1}{(X-A)^n}$$

とおく。$\lim_{X\to\infty}H(X)=0$なので、

$$\lim_{X_1\to\infty}\frac{G(X)-G(X_1)}{H(X)-H(X_1)}=\frac{G(X)}{H(X)}$$
$$=\frac{G_A^{(-1)}(\Phi_1)}{H_A^{(-1)}(\Phi_1)}$$

を満たす$\Phi_1\left(X<\Phi_1<\infty\right)$が存在する。明らかに$\Phi_1\in I_{B1}$となる。

$$\frac{d}{dX}G(X)=\frac{d}{dX}F(X)$$
$$+\left(\frac{F^{(-1)}(A)}{(X-A)^2}+\frac{F^{(-2)}(A)}{(X-A)^3}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-2)!(X-A)^n}\right)$$
$$(X-A)^2\frac{d}{dX}G(X)=(X-A)^2\frac{d}{dX}F(X)$$
$$+\left(F^{(-1)}(A)+\frac{F^{(-2)}(A)}{X-A}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-2)!(X-A)^{n-2}}\right)$$

$$G_A^{(-1)}(X) = F_A^{(-1)}(X) - \left(F^{(-1)}(A) + \frac{F^{(-2)}(A)}{X-A} + \cdots + \frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-2)!(X-A)^{n-2}}\right)$$

$G_A^{(-1)}(X)$ の性質を調べる。

$$\lim_{X\to\infty} G_A^{(-1)}(X) = \lim_{X\to\infty} F_A^{(-1)}(X) - F^{(-1)}(A) = F^{(-1)}(A) - F^{(-1)}(A) = 0$$

$H(X) = \dfrac{1}{(X-A)^n}$ より

$H_A^{(-1)}(X) = \dfrac{n}{(X-A)^{n-1}}$ となる。

$$\lim_{X_1\to\infty} \frac{G_A^{(-1)}(\Phi_1) - G_A^{(-1)}(X_1)}{H_A^{(-1)}(\Phi_1) - H_A^{(-1)}(X_1)} = \frac{\frac{d}{dX}G_A^{(-1)}(\Phi_2)}{\frac{d}{dX}H_A^{(-1)}(\Phi_2)}$$

を満たす $\Phi_2(\Phi_1 < \Phi_2 < \infty)$ が存在する。

$$\frac{\frac{d}{dX}G_A^{(-1)}(\Phi_2)}{\frac{d}{dX}H_A^{(-1)}(\Phi_2)} = \frac{-(\Phi_2 - A)^2 \frac{d}{dX}G_A^{(-1)}(\Phi_2)}{-(\Phi_2 - A)^2 \frac{d}{dX}H_A^{(-1)}(\Phi_2)} = \frac{G_A^{(-2)}(\Phi_2)}{H_A^{(-2)}(\Phi_2)}$$

となる。

次に、

$$G_A^{(-2)}(X) = F_A^{(-2)}(X) - \left(F^{(-2)}(A) + \frac{F^{(-3)}(A)}{X-A} + \cdots + \frac{F^{(1-n)}(A)}{(n-3)!(X-A)^{n-3}}\right)$$

$$H_A^{(-2)}(X) = \frac{n(n-1)}{(X-A)^{n-2}}$$

$$\lim_{X_1\to\infty} \frac{G_A^{(-2)}(\Phi_2) - G_A^{(-2)}(X_1)}{H_A^{(-2)}(\Phi_2) - H_A^{(-2)}(X_1)} = \frac{\frac{d}{dX}G_A^{(-2)}(\Phi_3)}{\frac{d}{dX}H_A^{(-2)}(\Phi_3)}$$

を満たす $\Phi_3(\Phi_2 < \Phi_3 < \infty)$ が存在する。

$$\frac{\frac{d}{dX}G_A^{(-2)}(\Phi_3)}{\frac{d}{dX}H_A^{(-2)}(\Phi_3)} = \frac{-(\Phi_3 - A)^2 \frac{d}{dX}G_A^{(-2)}(\Phi_3)}{-(\Phi_3 - A)^2 \frac{d}{dX}H_A^{(-2)}(\Phi_3)} = \frac{G_A^{(-3)}(\Phi_3)}{H_A^{(-3)}(\Phi_3)}$$

となる。

これを続けると、

$$\frac{G(X)}{H(X)} = \frac{G_A^{(-1)}(\Phi_1)}{H_A^{(-1)}(\Phi_1)} = \frac{G_A^{(-2)}(\Phi_2)}{H_A^{(-2)}(\Phi_2)} = \cdot\cdot = \frac{G_A^{(-n)}(\Phi_n)}{H_A^{(-n)}(\Phi_n)}$$

を満たす $\Phi_n(X < \Phi_1 < \Phi_2 < \cdot\cdot < \Phi_n < \infty)$ が存在する。

$G_A^{(-n)}(X) = F_A^{(-n)}(X), H_A^{(-n)}(X) = n!$

なので、

$$G(X) = H(X)\frac{G_A^{(-n)}(\Phi_n)}{H_A^{(-n)}(\Phi_n)} = \frac{F_A^{(-n)}(\Phi_n)}{n!(X-A)^n}$$

$\Phi_n = \Phi, X = B$ とすると、

$$F(B) = y_1 + \frac{F^{(-1)}(A)}{B-A} + \frac{F^{(-2)}(A)}{2!(B-A)^2} + \cdot\cdot$$

$$+\frac{F^{(1-n)}\left(A\right)}{\left(n-1\right)!\left(B-A\right)^{n-1}}+\frac{F_A^{(-n)}\left(\Phi\right)}{n!\left(B-A\right)^{n}}$$

が成り立つ。

（証明完）

４　引用・参考文献

［１]解析概論
第１版１７刷 P47-50,P61-62
著者　　高木貞治
発行者　岩波雄二郎
発行所　㈱岩波書店